Μαθημα 17ο

Κλασσικη

7/5/2018

Εξισωση Euler

$$J = \int_a^b f(x,y,y')\,dx \quad , \quad y' = dy/dx$$

$$\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{df}{dy'} = 0$$

• 2η μορφη εξισωσης Euler

Γνωριζουμε οτι η $f = f(x,y,y')$, τοτε:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx} + \frac{df}{dx}$$

$$= y'\frac{df}{dy} + y''\frac{df}{dy'} + \frac{df}{dx}$$

Αναγνωριζω τους ορους: $\frac{d}{dx}\left(y'\frac{df}{dy'}\right) = y''\frac{df}{dy'} + y'\frac{d}{dx}\frac{df}{dy'}$

Αντικαθιστω για τη δευτερη παραγωγο

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{df}{dy'}\right) = \frac{df}{dx} - y'\frac{df}{dy} - \frac{df}{dx} + y'\frac{d}{dx}\cdot\frac{df}{dy'}$$

εξ. Euler

$$= \frac{df}{dx} - y'\underbrace{\left(\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{df}{dy'}\right)}_{0} - \frac{df}{dx} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{df}{dy'}\right) = 0}$$

η οποια εξισωση αυτη χρησιμοποιειται σε αντικατασταση της αρχικης αν η f εξαρταται αμεσα απο το x και $\frac{df}{dx} = 0$

▸ Γενίκευση σε περισσότερες από μια μεταβλητές

Μπορούμε εν γένει να θεωρήσουμε ότι
$f = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_1', y_2', \ldots)$
Δηλαδή γενικά $f = f(x, y_i, y_i')$, $i = 1, 2, \ldots$
Τότε $\forall i$ έχω

$$\frac{df}{dy_i} - \frac{d}{dx}\frac{df}{dy_i'} = 0$$

οι μεταβλητές θεωρούνται ανεξάρτητες

▸ Εξίσωση Euler υπό συνθήκη

π.χ.

Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δυο σημείων πάνω σε μια επιφάνεια. Τότε όλα τα σημεία της διαδρομής πρέπει να ικανοποιούν την Εξίσωση Euler

① Ελαχιστοποιώ πρώτα ένα μήκος

② πρέπει να είμαι πάνω στην επιφάνεια

Θέλω να ικανοποιήσω δηλ. μια ποσότητα που υπόκειται σε μια παραπάνω συνθήκη

Έστω $f = f(x, y, y', z, z')$ και η συνθήκη $g(x, y, z) = 0$

Η συνάρτηση Lagrange γράφεται ως εξής

$$\left.\frac{dL}{da}\right|_{a=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{df}{dy'} \right] \frac{dy}{da} + \left[\frac{df}{dz} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{df}{dz'} \right] \frac{dz}{da} \right\} dx$$

Οι παράγωγοι $\frac{dy}{da}$ και $\frac{dz}{da}$ δεν είναι γρ. ανεξάρτητες και οι Εξισώσεις Euler δεν ισχύουν στην αρχική τους μορφή

Συνδέονται μέσω της $g(x, y, z) = 0$

Κατα τον ιδιο τροπο βρισκω τις μεταβολες της συνθηκης ως προς τη παραμετρο ελαχιστοποιησης του α

Δηλαδη

$$\frac{dg}{da} = \frac{dg}{dy}\cdot\frac{dy}{da} + \frac{dg}{dz}\cdot\frac{dz}{da} + \cancel{\frac{dg}{dx}\frac{dx}{da}}^{\,0}$$

$$\begin{cases} y = y(x,a) = y(x,0) + a\,n_1(x) \\ z = z(x,a) = z(x,0) + a\,n_2(x) \end{cases} \rightarrow \text{Ειχαμε πει}$$

Αρα $\frac{dg}{da} = n_1\frac{dg}{dy} + n_2\frac{dg}{dz} = 0$ → επειδη $g(x,y,z)=0$ αρα και παραγωγος προφανως 0

$$\Rightarrow \boxed{n_1\frac{dg}{dy} + n_2\frac{dg}{dz} = 0}$$

- Τι σημαινει γεωμετρικα;

$\nabla\vec{g}\cdot\vec{n} = 0$

Δηλ ειναι η προβολη της κατευθυνομενης παραγωγου της g πανω στο διανυσμα $\vec{n} = (n_1, n_2)$

Συναρτηση Lagrange θα γινει (με βαση τη σχεση που βγαλαμε)

$$\frac{dL}{da}\Big|_{a=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{df}{dy'}\right]n_1 + \left[\frac{df}{dz} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{df}{dz'}\right]\cdot n_2\right\}dx$$

Διαλεγω να αντικαταστησω ειτε το n_1 ειτε το n_2

$$n_2 = -n_1\frac{g_y}{g_z}$$

Αρα εχω

$$\left.\frac{dL}{da}\right|_{a=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial y'} \right] n_1 - \frac{g_y}{g_z}\left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial z'} \right] n_1 \right\} dx = 0 \quad \forall n_1$$

$$\frac{1}{g_y}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{1}{g_z}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = \lambda(x)$$

συναρτηση του x

Εχουμε λοιπον το εξης συστημα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \lambda(x)\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z'} = \lambda(x)\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z} \end{cases}, \quad g(x,y,z)=0$$

Η συναρτηση $\lambda=\lambda(x)$ ειναι ο πολλαπλασιαστης Lagrange

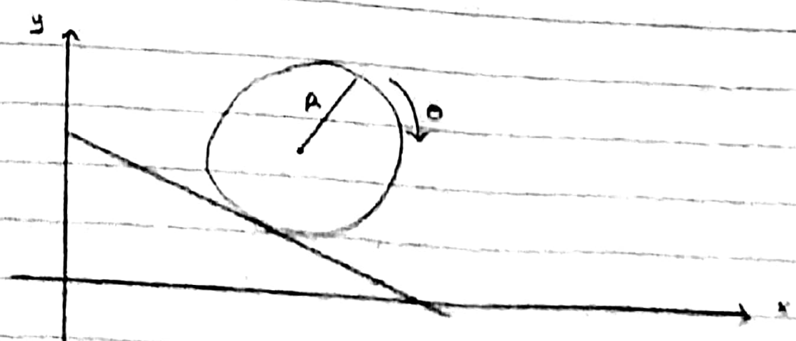
Στη γενικη περιπτωση που εχουμε παραπανω απο δυο μεταβλητες, δηλ. $f=f(y_i,x)$, $i=1,2,\dots$ γραφουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial y'} + \sum_j \lambda_j(x)\frac{\partial g_i}{\partial y_i} = 0$$

με $g_i(x,y_i)=0$

Παραδειγμα 1:

Εστω ενας δισκος που κυλιεται χωρις να ολισθαινει σε κεκλιμενο επιπεδο



Η σύσταση που διανύει ο δίσκος είναι $x = R\theta$

Η συνθήκη περιορισμού είναι η εξής: $x - R\theta = 0 \Rightarrow$

$g(x,\theta) = 0$

▶ Πολλές φορές η συνθήκη περιορισμού θα είναι κρυμμένη

Εν γένει η συνθήκη περιορισμού μπορεί να είναι και αυτή σε ολοκληρωτική μορφή

Έστω ότι ζητάμε τη συνάρτηση $y = y(x)$ για την οποία

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

έχει ακρότατο $y(a) = A$, $y(b) = B$ και επιλέγουν τις συναρτησοειδείς

$$K[y] = \int_a^b g(x, y, y')\, dx \quad \text{είναι σταθερό}$$

Δηλαδή ζητάμε τη σταθερή λ τ.ω.

$$\int_a^b (f + \lambda g)\, dx \quad \text{να είναι σταθερό}$$

Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0$$

$K[y] = \ell$ σταθερά

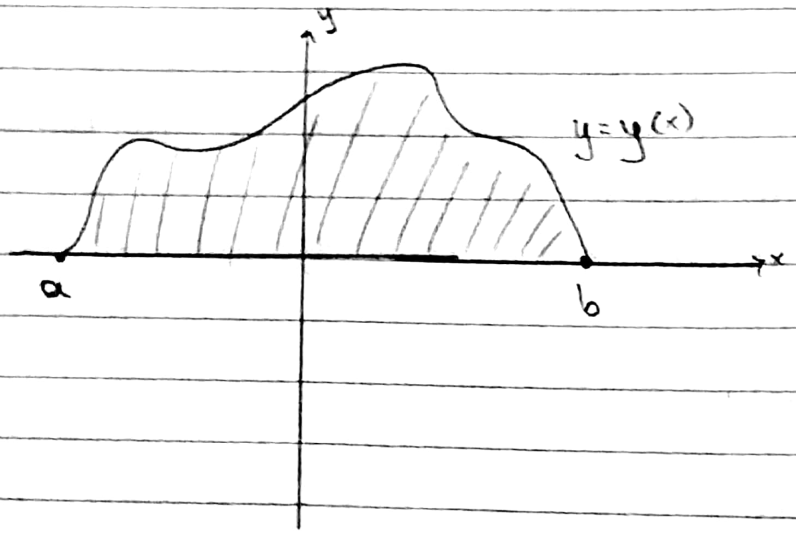
$y(a) = A$

$y(b) = B$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η καμπύλη $y = y(x)$ σταθερού μήκους που φράσσεται από τον οριζόντιο άξονα και εσωκλείει μια μέγιστη περιοχή.

• σταθερό μήκος ℓ



$y(x) > 0$

$J[y] = \int_a^b y\, dx =$ εμβαδόν

Επίσης ξέρω $y(a) = y(b) = 0$ και ότι

$K[y] = \int_a^b (d^2x + d^2y)^{1/2} = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \ell$

Έχω ότι $f = y$, $g = \sqrt{1+(y')^2}$

Εξ. Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 0 + \lambda\left(0 - \frac{d}{dx}\,\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0 \Rightarrow$$

τετραγωνίζω και λύνω ως προς y'

$$\lambda \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 1 \Rightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c_1 \cdot x \Rightarrow (y')^2 = \frac{(x-c_1)^2}{\lambda^2 - (x-c_1)^2}$$